EXERCICE N°1 : 30' 6 points

Soit (U_n) une suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2U_n - 1} \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°) Soient (V_n) et (W_n) deux suites définies sur IN par $V_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$ et $W_n = \ln(V_n)$.

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $W_0 = \ln(2)$.

b) Déterminer le terme général de (W_n) et vérifier que pour tout $n \in IN$, $W_n = \ln\left(2^{2^n}\right)$.

c) Montrer alors que pour tout $n \in IN$, on a $U_n = \dfrac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$.

d) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N°2 : 30' 6 points

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout $n \in IN^*$ $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Etablir pour tout $n \in IN^*$ la relation : $2.I_n = e^2 - n.I_{n-1}$. Calculer alors I_2 .

3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4) a) En remarquant que $x.(\ln x)^n = x^2 \dfrac{(\ln x)^n}{x}$

Montrer que $\dfrac{(\ln x)^n}{x} \leq x(\ln x)^n \leq e^2 \dfrac{(\ln x)^n}{x}$ pour tout $x \in [1, e]$.

b) En déduire que : $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE N°3 : 30' 6 points

1°) Soient f et g les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)-x$ et $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.

a) Etudier le sens de variation de f et g sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$.

2°) Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $U_1=\frac{3}{2}$ et pour tout n de IN^*, $U_{n+1}=U_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

a) Montrer que pour tout n de IN^*, $U_n>0$.

b) Montrer que pour tout n de IN^*, $\ln(U_n)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

3°) On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

Montrer que $S_n-\frac{1}{2}T_n\le\ln(U_n)\le S_n$.

4°) a) Calculer S_n et T_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.

5°) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b) En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel $\mathcal{L}$.

c) Montrer que $\ln(2)\le\ln(\ell)\le 1$ et en déduire un encadrement de $\mathcal{L}$.

EXERCICE N°4 : 30' 6 points

Soit la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x}{x-1}+\ln(x-1)$.

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité graphique étant 2cm)

1) a) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Montrer que l'équation $g(x)=3$ admet exactement deux solutions α et β dans $]1,+\infty[$.

b) On suppose que $\alpha<\beta$. Vérifier que $1<\alpha<\frac{3}{2}$

3) Etudier les branches infinies de (Γ).

4) Montrer que la courbe (Γ) admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

5) Tracer la courbe (Γ).

6) a) Montrer que $\int_2^{e+1}\frac{x}{x-1}dx=e$

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par (Γ), $\Delta: y=x$ et les droites $x=2$ et $x=e+1$.